

Dr. Reimer Kornmann, Prof. i. R.
www.ph-heidelberg.de/wp/kornmann

Mathematik: für Alle von Anfang an! – Förderung mathematischer Grundkompetenzen

(Vortrag im Rahmen des 2. Expertenforums des Pädagogischen Fachseminars Karlsruhe,
Abteilung Sonderpädagogik, am 20. 11. 2012)

Einleitender Überblick und inhaltliche Positionierung

Grundlage meiner Ausführungen ist ein tätigkeitstheoretisches Konzept menschlicher Entwicklung. Es geht von konkreten Alltagserfahrungen aus, die im Rahmen des individuellen Lebensvollzugs gewonnen werden und sich durch eine pädagogische Gestaltung der schulischen und außerschulischen Lebenswelt entwicklungsförderlich beeinflussen lassen. Darüber hinaus liefert das Konzept direkt zugängliche, objektivierbare Beobachtungskriterien, die den aktuellen Stand der individuellen Entwicklung kennzeichnen und auf die „Zone der nächsten Entwicklung“ verweisen. Dabei lassen sich auch solche Phänomene entdecken, die - beginnend mit ersten sensorischen Erfahrungen - in eine entwicklungslogische Struktur des Erwerbs mathematischer Kompetenzen eingeordnet werden können. Diese Struktur wird dann im zweiten Teil des Vortrags vorgestellt und erläutert.

Das von mir dargestellte theoretische Konzept weist deutliche Parallelen zu dem „Bildungsplan 2009 – Schule für Geistigbehinderte“ des Landes Baden-Württemberg auf. In dem Unterabschnitt „Unterschiedliche Zugangsformen der Schülerinnen und Schüler erkennen und ermöglichen“ werden vier qualitativ verschiedene Aneignungsmöglichkeiten der Lernenden aufgeführt:

- die basal-perzeptive Aneignung,
- die konkret-gegenständliche Aneignung,
- die anschauliche Aneignung,

- die abstrakt-begriffliche Aneignung

(S. 14).

Die inhaltliche Beschreibung dieser Aneignungsformen findet sich in ähnlicher Form auch in meiner Darstellung. Diese orientiert sich an der Theorie der Abfolge der dominierenden Tätigkeiten von Leontjew (1973), wie sie von Jantzen (1980) und Schmidt-Kolmer (1986) systematisch aufgearbeitet und später von verschiedenen Autoren für spezifische pädagogische Zielsetzungen genutzt wurde (Kornmann, 1991; Pitsch, 2002; Flämig, Musketa & Leu, 2009). Gegenüber den Aneignungsformen im Bildungsplan 2009 unterscheidet sich die Abfolge der dominierenden Tätigkeiten aufgrund einer etwas anderen Systematik: Im Bildungsplan umfasst die basal-perzeptive Aneignung sowohl die Stufen der sensorischen (oder perzeptiven) Tätigkeit als auch die der manipulierenden Tätigkeit. Ansonsten entsprechen die Merkmale und Einteilungen im Bildungsplan 2009 weitgehend der Abfolge der dominierenden Tätigkeiten. Ein weiterer Unterschied gegenüber den Aneignungsformen des Bildungsplans kann darin gesehen werden, dass die Theorie der Abfolge der dominierenden Tätigkeiten die Möglichkeiten individueller Entwicklungen über die verschiedenen Stufen hinweg betont. *Sie ist also dynamisch konzipiert, während die Aneignungsformen den Eindruck eines statischen Konzepts zur Beschreibung interindividueller Unterschiede nahelegen.*

Bezüglich der inhaltlichen Auffassungen zur Mathematik stehen meine Ausführungen durchaus im Einklang mit dem Bildungsplan 2009. Dort wird Mathematik zwar einerseits (ab S. 109) als ein eigenständiger Bildungsbereich aufgeführt, andererseits werden aber die Verbindungen zwischen den verschiedenen Bildungsbereichen betont. Besonders nahe liegen solche Verbindungen zu dem Bildungsbereich „Selbstständige Lebensführung“: So werden beispielsweise Zeit und Geld in den jeweiligen Themenfeldern beider Bildungsbereiche ausdrücklich genannt. Bei meinen Ausführungen möchte ich

diese enge Verknüpfung nachdrücklich unterstreichen und auf die enge Verwobenheit der Mathematik mit vielen wichtigen Erfahrungsbereichen des alltäglichen Lebens im schulischen und außerschulischen Bereich hinweisen. Dabei möchte ich aufzeigen, wie sich grundlegende mathematische Konzepte im Zusammenhang mit den Aneignungs- oder Zugangsformen bzw. mit den dominierenden Tätigkeiten herausbilden. *Mathematik wird also nicht nur als Unterrichtsfach gedacht, sondern als ein Lebensprinzip, das viele Alltagssituationen durchdringt.* Ein solcher Ansatz ist keineswegs neu: Ein ähnliches, auf die Lebenswelt bezogenes Konzept, das auf der kritischen Auseinandersetzung mit der Entwicklungstheorie von Jean Piaget beruht und sich an der pädagogischen Situation von Menschen mit geistiger Behinderung orientiert, haben Schmitz & Scharlau (1985) in ihrem nach wie vor sehr lesenswerten Buch vorgelegt.

Zunächst sollen einige grundlegende Begriffe erläutert werden, die hilfreiche Orientierungen für die praktische Arbeit liefern können.

Dabei sind mir zwei Prinzipien besonders wichtig:

1. Kein Kind soll aus den Überlegungen und Schlussfolgerungen zur Mathematik ausgeschlossen werden, und daher möchte ich gerade die Gruppe von Schülerinnen und Schüler besonders berücksichtigen, die durch schwere Beeinträchtigungen und Einschränkungen ihrer Lebensvollzüge gekennzeichnet ist. Wir können sie aber nur dadurch berücksichtigen, dass wir den Begriff der Mathematik weit genug fassen.
2. Bei einem weit gefassten Begriff von Mathematik können grundlegende oder basale Zugänge zur Mathematik geschaffen werden, die ganz eng mit Emotionen verbunden sind. Somit werden die emotionalen Aspekte der Mathematik deutlich herausgearbeitet.

Der tätigkeitstheoretische Zugang zum Verständnis menschlicher Entwicklung

Grundlage der entwicklungstheoretischen Überlegungen ist die Kategorie der Tätigkeit. Tätigkeit gilt als wesentliches Merkmal allen Lebens, weil sie den lebenserhaltenden Austausch eines jeden Organismus mit seiner belebten und unbelebten Umwelt gewährleistet. Das individuelle Leben endet, wenn dieser Stoffwechsel unterbleibt. Diese Aussage gilt generell für alle Lebewesen. Der elementarste Austausch des Menschen mit seiner Umwelt ist die Tätigkeit des Atmens.

Der sich entwickelnde und selbst auch im Schlaf stets tätige Mensch durchschreitet verschiedene, biologisch mitbedingte Lebensstadien in fester Abfolge. Dieser Prozess vollzieht sich bei verschiedenen Individuen in unterschiedlicher Geschwindigkeit – abhängig sowohl von biologischen Voraussetzungen als auch von Erfahrungen, die aus den Tätigkeiten, also aus den Interaktionen des jeweiligen Menschen mit seiner belebten und unbelebten Umwelt, resultieren. Bei manchen Menschen ist das Tempo ihrer Entwicklung aufgrund der genannten Bedingungen so langsam, dass gar nicht alle Stadien durchschritten werden können. Aber: Der Entwicklungsprozess vollzieht sich bei allen Menschen nach gleichen Gesetzmäßigkeiten, und diese Gesetzmäßigkeiten lassen sich mittels der Tätigkeitstheorie in einer für die Pädagogik angemessenen Form beschreiben und erklären. Ein Bezug auf Altersklassen oder Altersnormen ist für den Erkenntnisgewinn durch dieses Konzept nicht nötig. Bei den weitaus meisten Menschen sind die hier beschriebenen dominierenden Tätigkeiten zum Einschulungsalter zu beobachten, und dies klingt auch in den Formulierungen sowohl bei meinen Ausführungen als auch in der Fachliteratur immer wieder an. Gleichwohl ist daran zu denken, dass manche dieser Tätigkeitsformen auch das Leben älterer Menschen bestimmen können.

Ein zentraler Begriff für diesen Prozess ist der Gegenstandsbezug. Der Begriff des Gegenstands oder Objekts umfasst im Rahmen der Tätigkeitstheorie nicht nur die Dinge der unbelebten Natur und die Erzeugnisse des Menschen, sondern auch alle belebten Körper einschließlich des eigenen Organismus. Damit eröffnet sich eine bedeutende Perspektive, unter der wir die individuelle menschliche Entwicklung beschreiben und erklären können. Dies hat einige theoretische und praktische Vorteile:

1. Die Tätigkeiten selbst und die Objekte, auf die sich die Tätigkeiten beziehen, lassen sich im Allgemeinen bei jedem Individuum in jeder Phase seiner Entwicklung gut beobachten und genau beschreiben oder zumindest mit einiger Plausibilität erschließen. Dies gilt auch für viele wesentliche Merkmale der Situationen und sozialen Kontexte, in denen sich die Tätigkeiten vollziehen.
2. Somit lassen sich auch Veränderungen des Gegenstandsbezugs im Laufe der individuellen Entwicklung gut erfassen. Dabei vollziehen sich die Veränderungen in charakteristischer Weise:
 - Die Zahl der Objekte, auf die sich die Tätigkeiten richten, nimmt – zumindest in den ersten Lebensabschnitten – zu.
 - Die Qualität der Tätigkeit, also die Art und Weise, wie mit den Gegenständen umgegangen wird, verändert sich so, dass immer neue Erfahrungen über die Gegenstände, die eigenen Aktivitäten und die Situationen – zumindest in den ersten Lebensabschnitten – gewonnen werden.

Beide Aspekte der Entwicklung führen dazu, dass sich die Möglichkeiten des Handelns, Denkens und Erlebens in einer der Realität angemessenen Weise zunehmend erweitern.

3. Weiterhin liefert der Gegenstandbezug geeignete Kriterien, um den jeweils aktuellen individuellen Entwicklungsstand vor dem Hintergrund der jeweils gegebenen und genutzten Erfahrungsmöglichkeiten zu beschreiben und zu rekonstruieren sowie daraus Zielkriterien für die Planung pädagogischer Prozesse abzuleiten.

In den einzelnen Stadien oder Abschnitten werden spezifische Erfahrungen gewonnen, die sich unter verschiedenen Perspektiven betrachten und näher analysieren lassen – etwa unter der Frage, welche Bedeutung sie für den Spracherwerb oder für die Qualität der Bindung an die Bezugspersonen haben. Meine Ausführungen konzentrieren sich auf die Frage, wie sich die bei den Tätigkeiten gewonnenen Erfahrungen im Erwerb und im Aufbau grundlegender mathematischer Konzepte niederschlagen.

Zum Erwerb grundlegender mathematischer Konzepte im Rahmen der Tätigkeitstheorie

Mathematik kann als ein Erfahrungsbereich definiert werden, bei dem die Tätigkeiten mit dem *Erkennen und Herstellen von Gleichheit und Verschiedenheit* verbunden sind.

Je nach Perspektive wird der Begriff der Gleichheit auch als Identität, Einheitlichkeit, Konstanz, Stabilität, Homogenität, Invarianz, Äquivalenz, Isomorphie, Kongruenz, Sicherheit, Vorhersagbarkeit, Regelmäßigkeit oder Redundanz bezeichnet; für sein Gegenteil stehen die Begriffe Verschiedenheit, Unterschiedlichkeit, Heterogenität, Variabilität, Instabilität, Unsicherheit, Zufälligkeit, Kontingenz, Unregelmäßigkeit oder Chaos. Der Begriff der Gleichheit kann sich auf Merkmale, auf Merkmalsklassen oder auf Relationen von Zuständen, Situationen, Gegebenheiten, Lebewesen oder auf unbelebte Objekte in der Natur und Erzeugnisse des Menschen richten – also gleichsam auf alles, was von Menschen wahrnehmbar ist.

Im Zuge der individuellen Entwicklung verändern sich im Zusammenhang mit der Qualität der menschlichen Tätigkeit auch die Konzepte von Gleichheit, und zwar werden sie im Allgemeinen differenzierter, allgemeiner und abstrakter. Ausnahmen bilden pathologische Prozesse oder anhaltende schwere Notsituationen, durch die es zu Einschränkungen und Begrenzungen der Inhalte und Formen von Tätigkeiten und zu fehlender Erfahrungsbildung kommt – etwa, wenn es nur darum geht, den Tag lebend zu überstehend. In solchen Fällen werden die Konzepte von Gleichheit immer enger und einseitiger.

Wie aber bilden sich die Konzepte von Gleichheit und Verschiedenheit im Rahmen der menschlichen Entwicklung aus? Diese Frage soll nun anhand der Abfolge der dominierenden Tätigkeiten geklärt werden.

Die *erste* Stufe der dominierenden Tätigkeiten wird als die sensorische (oder perzeptive) Tätigkeit bezeichnet.

Erste Erfahrungen bilden sich offensichtlich bereits im vorgeburtlichen Stadium mit der Entwicklung des Zentralen Nervensystems. Der Fötus befindet sich entweder in einem Zustand ungerichteter Aktivität oder in einem Zustand der Ruhe. Unter günstigen Lebensbedingungen der Mutter bildet sich ein stabiler Schlaf-Wach-Rhythmus heraus, bei dem sich der Fötus an die Lebensgewohnheiten der Mutter anpasst. Wohl kaum werden die jeweiligen Zustände innerhalb dieser beiden gleichförmigen Phasen als irgendwie bedeutsam erlebt und wahrgenommen. Dies ist jedoch dann anzunehmen, wenn es zu Störungen, etwa durch laute Geräusche oder plötzliche Lageveränderungen, kommt. In Phasen der Aktivität führen solche Störreize zu „Schreck-Reaktionen“, also zu einer Einstellung aller Bewegungen, während die gleichen Reize im Zustand der Ruhe das Einsetzen von Aktivitäten bewirken. Denkbar ist, dass die Aktivitäten in den stabilen Phasen die Grundlage positiver Emotionen bilden und dass die Störungen der Aktivitäten und der Ruhe die Grundlagen negativer Emotionen bilden. Auch ist davon auszugehen, dass Föten

einen stabileren Schlaf-Wach-Rhythmus ausbilden, wenn sie nur selten Störreizen ausgesetzt sind und ihre Mütter einen regelmäßigen und meist stressfreien Tagesablauf haben. Regelmäßigkeit, Vorhersagbarkeit und Gleichheit von Merkmalen der Umwelt können also bereits im vorgeburtlichen Stadium wahrgenommen werden, und sie beeinflussen die Lebensäußerung nach der Geburt.

Die schon vor der Geburt wahrnehmbare Gleichheit von Geschehnissen und das Erleben von Verschiedenheit ist eine wesentliche Grundlage weiterer Erfahrungsbildung auch nach der Geburt. Die Wahrnehmung von Gleichheit bezieht sich nicht nur auf die konstanten Merkmale der jeweiligen Situation, sondern auch auf die Regelmäßigkeit im Wechsel verschiedener Phasen und insbesondere auf die offensichtlich wahrnehmbaren Signale bei ihrem Übergang. Solche Phasen im Wachzustand wären beispielsweise der Zustand zunehmenden Hungers, der nach einer Phase des Schreiens von der Phase des Stillens abgelöst wird. Auf den Zustand der Sättigung folgt oft eine Phase wachen Interesses an der unmittelbaren Umwelt, die dann irgendwann in einen anderen Zustand, vielleicht den des Schlafens übergeht.

Vermutlich führt die gute Vorhersagbarkeit von Situationsmerkmalen zu positiven Emotionen, während unvorhergesehene Störungen von negativen Emotionen begleitet sind. Treten solche störenden Ereignisse häufig und unvermittelt, also ohne Ankündigung auf, wird die Erfahrungsbildung erheblich behindert.

In den ersten Lebenswochen besteht die Erfahrungsbildung im Wiedererkennen der Merkmale von Objekten und Situationen. Das Wiedererkennen ist an das Konzept der Gleichheit gebunden: Nur was bezüglich bestimmter Merkmale als gleich wahrgenommen wird, kann wiedererkannt werden – unabhängig davon, auf welche Merkmale sich die Gleichheit bezieht. Im Sinne des Klassischen Konditionierens lernen die Säuglinge die Bedeutung von Signalreizen, weil sie

auf diese in spezifischer Weise reagieren. Immer wenn die Pflegeperson eine bestimmte Handlung in bestimmter, jeweils gleicher Weise – vielleicht durch immer das gleiche Wort – ankündigt, wird man an den Reaktionen der betroffenen jungen Menschen erkennen können, dass sie die Bedeutung dieses Signals gelernt haben.

Bedeutsame Signalreize beziehen sich aber auf solche Merkmale von Situationen, die anzeigen, dass ein Zustand des Unwohlseins, etwa infolge Hungers, in Kürze beendet sein wird. So gewinnen ursprünglich ganz neutrale, also kaum wahrnehmbare Merkmale der Umgebung, eine Bedeutung, und sie werden daher in ähnlich wiederkehrenden Situationen auch wiedererkannt. Damit nimmt der Erfahrungsbestand dessen, was als jeweils gleich erlebt wird, von Tag zu Tag zu und wird von positiven Emotionen begleitet. Ein großer und sicherer Erfahrungsbestand wird dann ausgebildet, wenn die Pflegepersonen sehr genau auf solche Äußerungen des Kindes achten, die einen bestimmten Mangelzustand anzeigen. Je gezielter oder spezifischer die Pflegepersonen dann vorgehen, um dem jeweiligen Mangelzustand abzuhelpfen, desto differenzierter und reichhaltiger werden die Erfahrungsmöglichkeiten für einen jungen Menschen, dessen Erfahrungsbereich ursprünglich allein auf die Wahrnehmung von Zuständen des Wohlbefindens und des Unwohlseins und auf die damit einhergehenden Signalreize beschränkt war. Je größer ein solcher Erfahrungsbestand wird, desto leichter lassen sich auch die verschiedenen Wahrnehmungsinhalte unterscheiden, etwa verschiedene Menschen aufgrund bestimmter charakteristischer Merkmale, vor allem der Stimme. Die Erfahrungen bilden sich umso fester und sicherer aus, wenn die zugrundeliegenden Verbindungen sehr regelmäßig und konsequent geknüpft werden und wenn stets darauf geachtet wird, dass sich der junge Mensch wohlfühlen kann. Unter solchen günstigen Voraussetzungen für den Erfahrungsgewinn kann also die mathematisch bedeutsame Kategorie der Gleichheit mit positiven Emotionen besetzt werden. Dabei bilden sich erste

Erfahrungen mit zeitlichen Abfolgen: Wenn die Mutter oder die Pflegeperson erscheint, wird ein erwarteter positiver Zustand eintreten. Solche Wenn-dann-Beziehungen sind ebenfalls Grundlage mathematischen Denkens: Wenn ich x wahrnehme, erwarte ich zugleich das Eintreten von y. Entspricht y meiner Erwartung, ist Gleichheit zwischen erwartetem und tatsächlichem Ereignis hergestellt – und auch dies führt zu positiven Emotionen.

Das Wiedererkennen geschieht bei Wiederholungen gleicher Vorgänge: Gleiches erscheint im zeitlich-sukzessiven Verlauf als gleich. In späteren Entwicklungsstadien können Gleichheit und Verschiedenheit auch bei räumlich-simultaner Präsentation von identischen Objekten erkannt oder hergestellt werden.

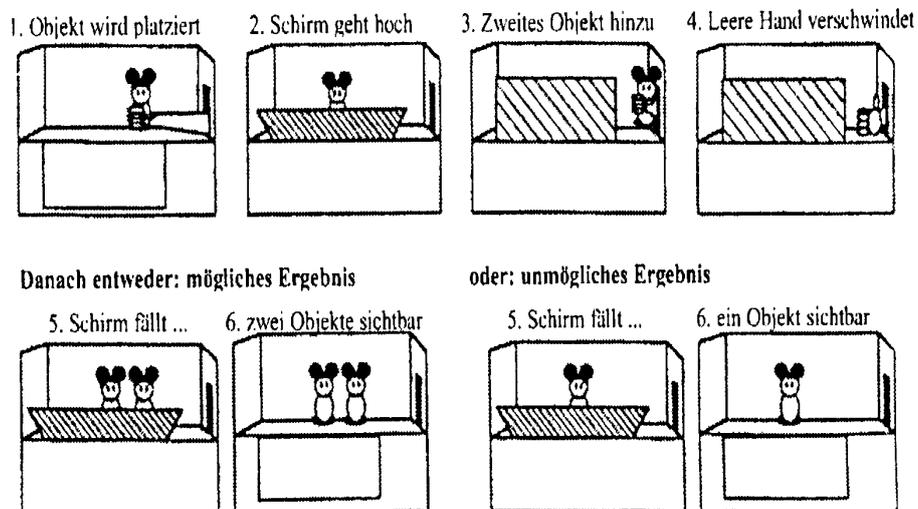
Mit erheblichen Beeinträchtigungen der emotionalen und kognitiven Entwicklung, also auch bezüglich des Erwerbs mathematischer Konzepte, ist dann zu rechnen, wenn auf die Bedürfnisäußerungen des Kindes nicht oder nicht hilfreich eingegangen wird, wenn die jungen Menschen also keine Verbindungen zwischen den verschiedenen Situationsmerkmalen und ihren Bedürfnissen erkennen können, und wenn bei ihnen häufig Zustände der Angst ausgelöst werden. In solchen Fällen nimmt das Interesse an der Umgebung deutlich ab, das Kind zieht sich zurück und seine Tätigkeiten beziehen sich nur noch auf den eigenen Körper.

Junge Menschen, die hingegen vorwiegend positive Erfahrungen mit den Merkmalen ihrer Umgebung haben sammeln können, zeigen in Zuständen des Wohlbefindens großes Interesse an ihrer Umgebung und wenden sich allem intensiv zu, was ihre Aufmerksamkeit erregt – und dies so lange, bis es ihnen langweilig zu werden scheint. Auch kleine Mengen von bis zu drei gleichen Objekten und die damit vorgenommenen Operationen des Hinzufügens und Wegnehmens werden intensiv und mit zunächst wachem Interesse – feststellbar an der Saugrate – betrachtet. Die Ergebnisse zahlreicher experimenteller

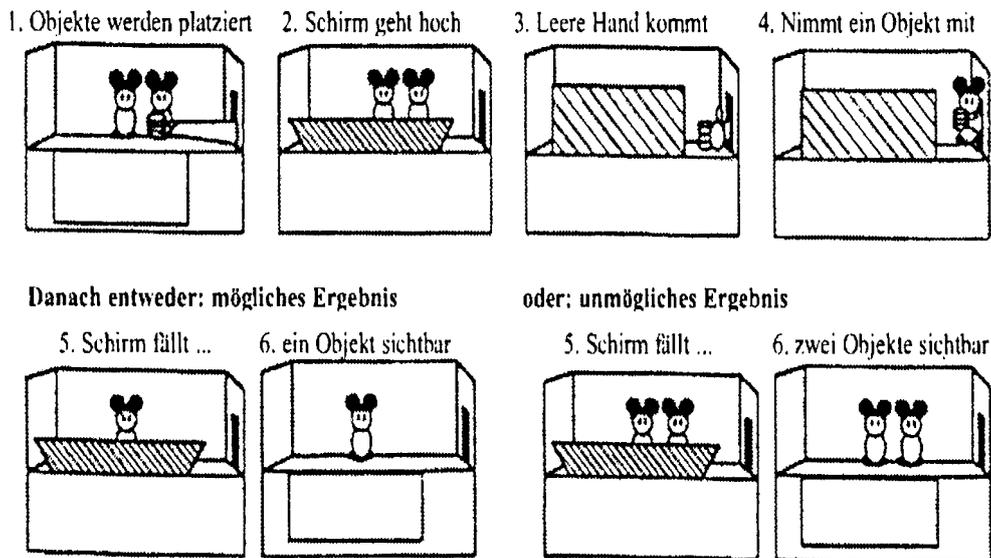
Untersuchungen kamen übereinstimmend zu dem Schluss, dass nur wenige Tage alte Säuglinge über so etwas wie einen Zahlensinn verfügen müssen: Optisch vorgegebene kleine Mengen werden deutlich unterschieden. Auf Manipulationen, die zu falschen und somit zu erwartungswidrigen Resultaten führen, reagieren die Säuglinge mit deutlich gesteigerter Erregung, anders als auf Manipulationen, die zu den erwarteten richtigen Resultaten führen. Diese verlieren nach einer gewissen Zeit ihren Reiz. Dieser Befund bedeutet nicht, dass die Säuglinge bereits Einsicht in die Vorgänge des Addierens und Subtrahierens besitzen, doch sie sind in der Lage, Unterschiede von Mengen zu erkennen, ähnlich wie sie die Farben blau, rot und gelb unterscheiden können: Werden ihnen zunächst die Farben blau und rot abwechselnd und mehrfach hintereinander als Flächen auf einem Bildschirm geboten, werden sie relativ bald ihre ursprüngliche Aufmerksamkeit ablegen, aber sie werden dann auf einmal besonders reagieren, wenn nach einer roten Fläche einmal keine blaue, sondern eine gelbe erscheint.

„Zahlensinn“ auf der Stufe der sensorischen Tätigkeit

Ereignisfolge $1+1 = 1$ oder 2



Ereignisfolge 2-1 = 1 oder 2



(entnommen Krajewski 2003, S. 50).

In den ersten Lebenswochen können die Säuglinge solche Erfahrungen nur gewinnen, wenn ihnen die entsprechenden Stimuli mehr oder weniger direkt von anderen Menschen geboten werden. Sie befinden sich in diesem Lebensstadium zwar noch in sehr großer Abhängigkeit von Ihrer Pflegeperson, üben aber umgekehrt auf diese spezifische Wirkungen aus. In einer ähnlichen Situation befinden sich auch ältere Menschen, die vollständig auf die Assistenz durch andere Menschen angewiesen sind.

Stichwortartige Zusammenfassung dieses Abschnittes:

Sensorische Tätigkeit

Beschreibung

- *Spezifische Reaktionen (Reflexe, Zuwendungen, Abwendungen) auf Merkmale („äußere Reize“) der dinglichen und sozialen Umwelt ebenso wie auf innere Reize, die einen biologischen Mangelzustand signalisieren (Schreien, Unruhe)*

Lern- und Erfahrungsmöglichkeiten

- *Ausbildung bedingter Reaktionen/ bedingter Reflexe bei zeitlich und räumlich regelmäßig miteinander verbundenen Reizen. Wiedererkennung gleicher Reize.*

- *Erlernen von Merkmalsunterschieden: Diskriminationslernen, klassisches Konditionieren*

Günstige organische Voraussetzungen

- *Intaktheit der Funktionen der Sinnesorgane, des Zentralnervensystems und des Bewegungsapparats.*

Günstige soziale Voraussetzungen

- *Regelmäßige Beachtung der vitalen (lebenswichtigen) Bedürfnisse – einschließlich der Stimulation durch möglichst vielfältige, alle Sinne ansprechende, angemessene und regelmäßig wiederkehrende Reize*

Risiken

- *Bereichsspezifische Erfahrungsdefizite durch organische Schäden. Allgemeine Erfahrungsdefizite durch mangelnde Zuwendung (fehlende / inadäquate Stimulation). Folgewirkung: Schreien, später Teilnahmslosigkeit, Krankheit usw. bei anhaltenden Mangelzuständen (sog. Deprivations- oder Hospitalismus-Syndrom)*

Erfahrungsbereich Mathematik

- *Ausbildung und Differenzierung der Repräsentation von konstanten Einheiten (Gleichheit als grundlegendes Konzept für die Mathematik)*
- *Erkennen von Wenn-Dann-Beziehungen als Voraussetzung für das Erleben konstanter Abfolgen (wie beim Zählen später notwendig)*
- *Wirksamkeit eines angeborenen Sinns für die Unterscheidung kleiner Anzahlen (Mengen bis 2 oder 3)*

Die für die sensorische Tätigkeit charakteristische Abhängigkeit wird ein gutes Stück überwunden, wenn es den jungen Menschen gelingt, ihre Bewegungen zu kontrollieren. Damit wird das *zweite* Stadium ihrer Entwicklung eingeleitet. Zunächst greifen sie nach allem, was in ihrer erreichbaren Nähe ist und ihnen noch nicht bekannt zu sein scheint. Dabei richten sie ihre auf das jeweilige Objekt bezogenen Tätigkeiten so aus, dass sie möglichst viele verschiedene Sinneseindrücke gewinnen können: Das Objekt wird betrachtet, in den Mund

genommen, geschüttelt, fallen gelassen, wieder aufgenommen, erneut in den Mund gesteckt. Diese Folge gleichförmig ablaufender Tätigkeiten wiederholen diese Menschen dann sehr oft und ausdauernd. Offensichtlich bilden sich im Zuge der Tätigkeiten bestimmte Erwartungen bezüglich der verschiedenen Qualitätsaspekte einzelner Objekte heraus. Bestätigen sich diese Erwartungen, dann hat dies eine verstärkende Wirkung, weil damit das wichtige Gefühl der Sicherheit, also eine positive Emotion, erzeugt wird. Folglich werden Tätigkeiten, die zu dem positiven Resultat, nämlich zur Bestätigung bestimmter Erwartungen führen, wiederholt.

Auf diese Weise gewinnen die Kinder zunächst einmal ein Spektrum qualitativ unterscheidbarer Merkmale, mit der sich ihre Umwelt beschreiben lässt. Damit bilden sie die Fähigkeit des Vergleichens aus, die für die Mathematik grundlegend ist: Gleiche Merkmalsqualitäten können als gleich identifiziert und von anderen Merkmalsqualitäten unterschieden werden.

Günstig ist es, wenn die Erfahrungen, die im Umgang mit den Objekten gemacht werden, von den Bezugspersonen beobachtet und mit korrekten Begriffen versprachlicht werden: Auf diese Weise lernen die Kinder, dass für gleiche Merkmalsqualitäten auch gleiche sprachliche Bezeichnungen verwendet werden.

Im Zuge dieses Erfahrungsprozesses gewinnt das Kind auch mathematisch wichtige Begriffe. Viele Merkmalsqualitäten lassen sich nämlich als Gegensatzpaare darstellen: groß – klein, schwer – leicht, warm – kalt, glatt – rau usw.

Durch solche Gegensatzpaare werden dann quantitative Vergleiche angebahnt: Wenn $A = \text{groß}$ und $B = \text{klein}$, dann $A > B$.

Solche Vergleiche stellen Kinder an, die schon krabbeln können. Ihnen werden zwei offene Dosen mit maximal vier Keksen gezeigt, danach geschlossen und in einiger Entfernung von ihnen aufgestellt. Kinder, die vergleichen können, krabbeln dann regelmäßig zu der Dose, in der sich mehr Kekse befinden. Dies

tun sie auch dann, wenn die beiden Dosen ursprünglich gleich viele Kekse enthalten haben und dann die Anzahl der Kekse in einer der Dosen verändert worden ist (ausführlich dargestellt bei Weißhaupt & Peucker, 2009). Kinder, denen Leistungen dieser Art gelingen, haben drei grundlegende kognitive Schemata (oder Erkenntnisse) für mathematisches Denken erworben:

- Zwei Mengen sind bezüglich der Anzahl ihrer Elemente entweder gleich oder ungleich.
- Durch Hinzufügen eines oder mehrerer Elemente lässt sich eine Menge vergrößern.
- Durch Wegnehmen eines oder mehrerer Elemente lässt sich eine Menge verkleinern.

Stichwortartige Zusammenfassung dieses Abschnittes:

Manipulierende Tätigkeit

Beschreibung

- *Aktive Zuwendungen zur Umwelt durch Willkürbewegungen der Hand (Greifen, Loslassen). Schematischer, also nicht gegenstandsspezifischer Verlauf. Dadurch Vermittlung verschiedener Sinneseindrücke von den Qualitäten jeweils gleicher Gegenstände*

Erfahrungsbildung

- *Verstärkung solcher Tätigkeiten, die zum „Erfolg“ (d. h. zur Vermittlung neuer Sinneseindrücke) führen. Dadurch Wiederholung derselben in ähnlichen Situationen (operantes Konditionieren) und zugleich Ausbildung immer komplexerer Schemata, die das Wiedererkennen gleicher und das Unterscheiden verschiedener Objekte, Personen, Zustände usw. ermöglichen.*

Günstige organische Voraussetzungen

- *Intakte Funktionen der Sinnesorgane, des Zentralnervensystems und des Bewegungsapparats, damit die Koordination der verschiedenen Sinneseindrücke und Tätigkeitselemente gelingt.*

Günstige soziale Voraussetzungen

- *Ausreichend Gelegenheit zur intensiven Beschäftigung mit gleichen Objekten. Unterstützung explorativer Verhaltensweisen (Neugier). Sprachliche Begleitung der explorativen Tätigkeiten.*

Risiken

- *Erfahrungsdefizite durch Auswirkungen biosozialer Schädigungen (siehe sensorische Tätigkeit), insbesondere aber durch Unterdrückung des explorativen Verhaltens. Dadurch Angst, Desinteresse und Rückzug auf die Wahrnehmungstätigkeit bzw. Betätigungen an und mit dem eigenen Körper (Selbststimulation).*

Erfahrungsbereich Mathematik

- *Erleben von festen Ereignisfolgen (Reihungen) bei Tätigkeitsabläufen.*
- *Entdeckung bipolarer Merkmale und Verstehen ihrer Bezeichnungen als Voraussetzung für quantitative Vergleiche („groß – klein“, „viel – wenig“ usw.),*
- *Ausbildung protoquantitativer Schemata, insbesondere Mengenveränderung (Vergrößern durch Hinzufügen, Vermindern durch Wegnehmen).*

Zusätzlich zu den mathematisch bedeutsamen Erfahrungen verbessern die Kinder durch den Gegenstandsbezug insbesondere ihre motorischen Fertigkeiten und gewinnen eine zunehmende Kontrolle über ihr Bewegungsverhalten. Dadurch wird es ihnen möglich, die verschiedenen Dinge ihrer Umgebung nicht mehr schematisch und gleichförmig zum Zwecke der Erkundung zu handhaben, sondern sie im Sinne ihrer objektiven Funktion oder gemäß ihrer objektiven Bedeutung zu benutzen. Dies lernen sie durch Beobachtung älterer Kinder, an deren sie sich orientieren (soziales Lernen, Imitationslernen, Lernen am Modell).

Damit erreichen sie das *dritte* Stadium der gegenständlichen Tätigkeit. In diesem erkennen sie, dass bestimmte Dinge nur in bestimmter Weise für bestimmte Zielsetzungen und oft auch nur von bestimmten Personen verwendet

werden. Tätigkeiten, die auf ein bestimmtes Ziel ausgerichtet sind und gemäß eines vorab festgelegten Plans erfolgen, werden auch als Handlungen bezeichnet. Die Spezifizierung der Inhalte, Formen und Akteure von Tätigkeiten bei Handlungen ist ein erheblicher Antrieb für die Sprachentwicklung: Dinge, die sich deswegen unterscheiden, weil sie unterschiedlich gehandhabt werden, lassen sich auch unterschiedlich bezeichnen. Dies fördert die Erkenntnis, dass es verschiedene Formen und Inhalte gegenstandsbezogener Tätigkeiten gibt, die deswegen auch unterschiedlich bezeichnet werden, und Entsprechendes gilt für die Akteure. Es besteht Gleichheit im Sinne einer Art Übereinstimmung zwischen den Komponenten der Tätigkeit und den sprachlichen Bezeichnungen.

Durch den Umgang mit anderen kompetenteren Menschen (älteren Kindern und Erwachsenen) erfahren die Kinder also, dass Objekte, die in gleicher oder ähnlicher Weise gehandhabt werden, auch gleiche Bezeichnungen erhalten, und sie lernen, welche Objekte sich einem gemeinsamen Oberbegriff zuordnen lassen, beispielsweise, dass Hunde, Katzen, Mäuse, aber auch Fische und Vögel alles Tiere sind. Damit erwerben sie die Fähigkeit zur Klassifikation, die eine wichtige Grundlage für den Zählerwerb und für arithmetische Operationen darstellt. Denn alle Objekte, die sich unter einem gemeinsamen Oberbegriff fassen lassen, gelten unter diesem Aspekt als gleich: Man kann sie zählen, man kann mit ihnen unter bestimmten Fragestellungen Berechnungen anstellen oder man kann ihre jeweilige Anzahl mit der Mächtigkeit anderer Mengen vergleichen. Dabei übernehmen die Kinder auch schon unbestimmte Mengenbezeichnungen wie „viele“ und „wenige“ sowie Begriffe für Vergleiche wie „mehr“ „weniger“, „gleich viele“, oder sie verwenden bestimmte Zahlbegriffe – sei es korrekt bis zu drei oder vier für entsprechend kleine Mengen oder inkorrekt etwa „tausend“ für große Mengen. Damit gewinnen sie die Grundlage für den sogenannten Kardinalzahl-Begriff: Jede Zahl bezeichnet eindeutig die Anzahl der Elemente einer Menge.

Die Fähigkeit zur Klassifikation und zur Bildung von Obergriffen führt zu einer weiteren, mathematisch bedeutsamen Erfahrungsquelle: zur Einsicht in die grundsätzliche Zerlegbarkeit von Mengen oder die Bildung von Teilmengen. So lässt sich die Gesamtmenge „Tiere“ nach vielfältigen Gesichtspunkten zerlegen: Tiere, die im Wasser leben, Tiere, die fliegen können, usw.

Mathematisch bedeutsam ist auch eine weitere Erfahrungsquelle der gegenständlichen Tätigkeit. Viele gegenständliche Tätigkeiten oder Handlungen erfolgen gemäß einer feststehenden Abfolge einzelner Teilhandlungen.

Erfahrbar wird dies für kleine Kinder etwa beim Anziehen in den kalten Jahreszeiten: Die Kleidungsstücke werden mit Hilfe der dafür verantwortlichen Person in einer stets gleichen, feststehenden Reihenfolge angelegt. Noch gleichförmiger sind die einzelnen Teilhandlungen beim Auslöffeln eines Tellers oder dem Leertrinken eines Bechers. Bei allen diesen Vorgängen wird die Erfahrung gemacht, dass immer eine Teilhandlung nach der anderen erfolgt, wobei es stets einen erste, danach eine zweite, usw. gibt.

Das Bewusstsein hierfür wird besonders geschärft, wenn die Teilhandlungen von den helfenden Bezugspersonen handlungsbegleitend verbalisiert werden. Mit diesen Tätigkeiten wird ein weiterer mathematischer Erfahrungsbereich angebahnt: der Ordinalzahlbegriff. Ordinalzahlen bezeichnen die Positionen von Dingen und Geschehnissen innerhalb einer Reihenfolge und geben damit eine bestimmte Rangfolge wieder.

Stichwortartige Zusammenfassung dieses Abschnittes:

Gegenständliche Tätigkeit

Beschreibung

- *Ausrichtung auf ein bestimmtes Ziel, somit Intention und Planung als Grundlage von Handlungen. Dadurch Einflussnahme auf die Realität - sei es in bewahrender, kontrollierender oder verändernder Absicht. Gegenstände sind entweder Mittel (oder Werkzeuge) oder Objekte, auf die sich die Tätigkeiten richten.*

Erfahrungsbildung

- *Erlernen des funktionsgerechten Gebrauchs von Gegenständen vor allem durch Imitation (Lernen am Modell, soziales Lernen). Gewinn von Einsicht bezüglich (1) objektiver Bedeutung des Gegenstandes, (2) des subjektiven Sinns der hierauf bezogenen Tätigkeiten, (3) der spezifischen Akteure. Damit Erwerb grundlegender Kategorien für den Spracherwerb.*

Günstige organische Voraussetzungen

- *Siehe manipulierende Tätigkeit!*

Günstige soziale Voraussetzungen

- *Ausreichend Gelegenheit zur Beobachtung, wie andere Menschen Dinge benutzen, und Gelegenheit zu wiederholten möglichst erfolgreichen Imitationen, solange das Bedürfnis danach besteht. Begünstigende Wirkung durch Hilfen beim Erwerb dieser Tätigkeiten und – im Hinblick auf den Spracherwerb – durch sprachliche Begleitungen des Tuns (kompetente Partner/Sprecher).*

Risiken

- *Abneigungen gegen entsprechende Objekte und Handlungen bei nicht erfolgreichen Tätigkeiten, die dann ihrerseits Ursache von Erfahrungsdefiziten aufgrund mangelnder Betätigungsmöglichkeiten werden. Sprachliche Defizite als mögliche Folgewirkung.*

Erfahrungsbereich Mathematik

- *Ausbildung der Fähigkeit zur Klassifikation: Die unter einem gemeinsamen Begriff klassifizierten Einheiten lassen sich zählen und mit anderen Mengen vergleichen. Übernahme von Bezeichnungen für Anzahlen (eins, zwei, ...) und Mengen (wenige, viele). Beginn der Bildung von Unterklassen (z. B. „Tiere“: Hunde, Elefanten, ...). Dadurch Einsicht in die Zerlegbarkeit von Mengen und Verständnis der Teil-Ganzes-Beziehungen. Erwerb mathematisch relevanter sprachlicher Strukturen und Begriffe (Pluralbildung, Steigerungsformen, unbestimmter Mengenbegriff, Ordinal- und Kardinalzahlen).*

Das Verstehen und Produzieren sprachlich gefasster Begriffe bildet den Übergang zum *vierten* Stadium, dem der symbolischen Tätigkeiten. Mit den sprachlichen Bezeichnungen erfolgen mehr oder weniger eindeutige Abbildungen der Tätigkeiten und der damit einhergehenden Erfahrungen. Insofern kann die Sprache als ein System von Zeichen oder Symbolen aufgefasst werden. Mit der Verwendung von Zeichen oder Symbolen können zurückliegende Erfahrungen ins Bewusstsein gehoben und anderen Menschen vermittelt werden, oder es können künftige Tätigkeiten gemeinsam mit anderen Menschen geplant werden. Dabei ist es nicht notwendig, dass die Objekte und Akteure der konkreten Tätigkeit zeitlich und räumlich anwesend sind. Die Sprache abstrahiert also von dem situativen Kontext und entbindet das Denken von räumlichen und zeitlichen Bezügen: Vergangenheit und Zukunft können also über den unmittelbaren Erfahrungsbereich hinaus mit der Gegenwart verbunden werden. Damit erweitern sich die Möglichkeiten menschlichen Denkens, Handelns und Erlebens erheblich.

Die Zeichen der Verbalsprache sind aber nur ein System von Symbolen, das die Kinder bei ihren Tätigkeiten gewinnen. Sie neigen nämlich dazu, alle für sie wichtigen Tätigkeiten im symbolischen Spiel zu imitieren. Insbesondere Tätigkeiten und Akteure mit hohem sozialem Prestige dienen als Vorbilder, wobei die verwendeten Objekte nicht den in der Realität verwendeten Gegenständen entsprechen müssen. Sie werden in der Phantasie umgedeutet, ebenso wie die Rollen der Akteure geradezu beliebig wechseln. Die Kinder praktizieren im Rollenspiel eine nach eigenen Vorstellungen gestaltete, imaginierte Welt, können aber schnell und leicht zwischen diesen Welten und sowie auch zwischen Spiel und Realität unterscheiden, wenn es erforderlich wird. Wenn nun mehrere Kinder zusammen spielen, müssen sie sich auf gemeinsame Regeln einigen, und diese gemeinsam festgelegt und zu beachtenden Regeln vermitteln Erfahrungen, die von großer Bedeutung für den Erwerb mathematischer Kompetenzen sind.

Stichwortartige Zusammenfassung dieses Abschnittes:

Symbolische Tätigkeit

Beschreibung

- *Spielerisches Agieren in der Rolle anderer Personen mit Verwendung spezifischer Objekte zur Simulation gegenständlicher Tätigkeiten. Orientierung nicht nur an direkt wahrnehmbaren äußeren Merkmalen, sondern auch an wahrgenommenen Rollen und Funktionen.*

Erfahrungsbildung

- *Unterscheidung zweier Formen der Realität: einer konkreten, in der die Tätigkeiten erfahrbare Konsequenzen haben, und einer imaginierten, in welcher die Handlungen „durchgespielt“ werden können. Dadurch Erwerb eines autonomen System zur Planung und Kontrolle eigener Handlungen als Voraussetzung für die Entwicklung von Selbstständigkeit.*

Günstige organische Voraussetzungen

- *Bei störungsfreier Entwicklung der vorausgegangenen Tätigkeitsformen Aufbau „funktioneller Hirnsysteme“ als Voraussetzung für die Möglichkeit, verschiedene Erfahrungen bei den Inhalten und Formen von Tätigkeiten unabhängig von deren räumlicher und zeitlicher Präsenz miteinander zu vernetzen und dabei Bezüge zwischen Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft herzustellen.*

Günstige soziale Voraussetzungen

- *Möglichst reichhaltiger Erwerb von konkreten Erfahrungen auf der Ebene der gegenständlichen Tätigkeit als Voraussetzung für die Möglichkeiten, diese auf der symbolischen Ebene abzubilden. Möglichst wenige Einschränkungen durch erwachsene Bezugspersonen. Einsicht durch Erfahrungen beim Rollenspiel, dass sich die Vereinbarung und Einhaltung von Regeln lohnt.*

Risiken

- *Mangelnde reale Erfahrungen im Bereich der gegenständlichen Tätigkeiten vermindern die Bildung und Verfügbarkeit von Symbolen. Dadurch Reduktion des Handelns auf die Auseinandersetzung mit räumlich und zeitlich präsenten, also konkreten Gegenständen. Starke Einschränkung der Möglichkeiten schöpferischen Handelns und freier Planungen.*

Erfahrungsbereich Mathematik

- *Verwendung von Zahlen im Regelwerk zahlreicher Spiele. Erwerb von Regeln zum sinnvollen Gebrauch von Symbolen (Symbolverständnis). Erwerb der Zahlenreihe und der Fertigkeit des Zählens.*

Beim gemeinsamen Spiel erfahren die Kinder, dass es auch Sinn machen kann, die Bedeutung bestimmter Symbole eindeutig und unveränderlich festzulegen. Diese Festlegung betrifft die Bedeutung der Zahlen sowie die Festlegung der Zahlenreihe und den Aufbau des Zahlensystems. Wie sich die Kinder diese Fähigkeiten des Zählens und der Verwendung von Zahlen in den ersten Stadien ihrer Entwicklung aneignen, sollen die nachfolgend dargestellten Übersichten zeigen (siehe auch Weißhaupt & Peucker, 2009). In der Systematik der Abfolge der dominierenden Tätigkeiten ist damit das *fünfte* Stadium, das Niveau der Lerntätigkeit, erreicht.

Stufe 1

- *Kinder haben gelernt, den Anfang der Zahlwortreihe aufzusagen: einszweidreivierfünf..., können aber die einzelnen Zahlwörter nicht unbedingt voneinander unterscheiden und schon gar nicht den Zahlwörtern bestimmte Mengen zuordnen*
- *Mengen werden miteinander verglichen, wobei der Vergleich (mehr / weniger / gleich viele) zunächst nach subjektivem Eindruck, später aufgrund von Eins-zu-Eins-Zuordnungen erfolgt*

Stufe 2

- *Aus den unverbundenen Wortketten werden die einzelnen Elemente herausgelöst und als Zählwörter verwendet (pro Element ein Zählwort in fester Folge!)*
- *Damit entwickeln sich ein ordinales Verständnis und die Ausbildung eines „mentalinen Zahlenstrahls“ :*

- *Es gibt eine feste Abfolge der Zahlwortreihe*
- *auf jede Zahl folgt eine bestimmte Nachfolgerzahl*
- *die Nachfolgerzahl ist größer als die Vorgängerzahl*
- *das Schema des Vermehrens und Verminderns (Mengenveränderung) bildet sich*
- *die Zahlwortreihe wird flexibilisiert (Zählen in Schritten, Rückwärtszählen) und erweitert*

Stufe 3

- *es bildet sich die Erkenntnis, dass Zahlen für die Anzahlen von Objekten stehen*
- *das Konzept des Enthaltenseins wird verstanden: Die Zahl 4 enthält auch die Zahlen 3, 2 und 1*
- *das kardinale Verständnis wird gewonnen: die im Zählprozess zuletzt gesagte Zahl repräsentiert die gesamte Menge („last word rule“)*
- *das Weiterzählen von einer bestimmten Zahl aus gelingt („counting on“ anstelle von „counting all“)*
- *Mengen können vorgegebenen Zahlen zugeordnet werden („gib mir fünf ...“)*
- *Vorgänger und Nachfolger von Zahlen können angegeben werden, ohne dass sie gezählt werden müssen*

Stufe 4

- *das Teile/Ganzes-Schema entsteht aus der Erkenntnis, dass Zahlen immer auch aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind, also zerlegt und zusammengesetzt werden können*
- *beim Weiterzählen wird jedes Zahlwort als Zählschritt verstanden, der zu der nächst größeren Zahl führt*
- *es entwickelt sich ein Verständnis für den Relationalzahlaspekt: Zahlen geben auch das Verhältnis von zwei Zahlen zueinander an, z. B. in Form von Differenzen*

Stufe 5

- *es wird erkannt, dass Mengen (Zahlen) in unterschiedliche Teilmengen (Zahlen) zerlegt werden können, ohne dass sich deren Mächtigkeit verändert*
- *damit wird ein flexibler Umgang mit mathematischen Anforderungen und effektiven Rechenstrategien möglich:*

$$\text{z. B. } 3 + 9 = 9 + 3 \text{ oder } 5 + 8 = 5 + 5 + 3$$

- *gewonnen wird die Einsicht in die Umkehrbarkeit von Additions- und Subtraktionsaufgaben:*

$$\text{z. B. } 9 + 3 = 12 \text{ / } 12 - 3 = 9,$$

und die wechselseitigen Beziehungen von „Zahlentripeln“ werden erkannt

Mit den hier skizzierten Stufen sind Ansatzpunkte und Ziele einer systematischen Förderung umschrieben, die auch im Rahmen eines speziell ausgewiesenen Mathematikunterrichts erfolgen sollte. Dies ist jedoch nur dann sinnvoll und Erfolg versprechend, wenn die hierfür notwendigen emotionalen und kognitiven Lernvoraussetzungen durch Erfahrungen auf den vorangegangenen Tätigkeitsstadien erworben werden konnten.

Literatur

Flämig, K., Musketa, B. & Leu, H. R. (2009):
Bildungs- und Lerngeschichten – Entwicklungstheoretische Hintergründe.
Weimar: das netz.

Jantzen, W. (1980):
Menschliche Entwicklung, allgemeine Therapie und allgemeine Pädagogik.
Solms-Oberbiel: Jarick.

Kornmann, R. (1991):
Veränderungen des Gegenstandsbezugs als Indikator kognitiver Entwicklung
und Möglichkeiten ihrer förderungsbezogenen diagnostischen Erfassung.
Heilpädagogische Forschung 17 (4), 184-191.

Krajewski, K. (2003):
Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Kovač.

Leontjew, A. N. (1973):
Probleme der Entwicklung des Psychischen. Frankfurt/M.: Athenäum Fischer.

Pitsch, H.-J. (2002):
Zur Entwicklung von Tätigkeit und Handeln Geistigbehinderter. Oberhausen:
Athena.

Schmidt-Kolmer, E. (1986):
Frühe Kindheit. Berlin/DDR: Volk und Wissen.

Schmitz, G. & Scharlau, R. (1985):
Mathematik als Welterfahrung . Die Erschließung von Raum und Zahl für
geistig behinderte Kinder. Bonn-Bad Godesberg: Dürr.

Weißhaupt, S. & Peucker, S. (2009):
Entwicklung arithmetischen Vorwissens. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt
(Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche – 2. Auflage. Weinheim: Beltz. 52-76

Bibliografischer Hinweis:

Das pädagogische Rahmenkonzept zu dem hier vorgestellten Ansatz findet sich
in der Schrift des Autors „Mathematik: für Alle von Anfang an! Bad Heilbrunn:
Klinkhardt 2010.